طرح آزمایش ها با دو عامل کنترل شده

یکی از مهم ترین فواید طرح آزمایش ها عبارت است از توانایی آزمون کردن اثر همزمان چندین عامل با کمترین هزینه ودر زمانی کوتاه. حال ببینیم چگونه یک آزمون را درباره دو عامل A و B در طی یک آزمایش می توانیم انجام دهیم. اگر بخواهیم اثر عامل A را برای v وجه و عامل B را برای w وجه با بکار بردن تنها یک عامل در هر دفعه مطالعه کنیم، باید اولین آزمایش را با $r_۱$ تکرار و بکاربردن $vr_۱$ قطعه برای آزمون اثر عامل A انجام دهیم، سپس دومین آزمایش را با $r_۲$ تکرار و بکارگیری $wr_۲$ قطعه برای آزمون اثر عامل B ، اجرا نماییم.

مرثرتر و بهتر است که دو عامل را همزمان روی یک واحد آزمایش اثر بدهیم. نتیجه ی y_{ijk} از واحد آزمایش u_{ijk} بدست می آید و همزمان وجه A_i عامل A و وجه B_j عامل B را می پذیرد. مقدار y_{ijk} برابر است با :

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + \epsilon_{ijk}$$

μ_{ij} اثر همزمان اعمال دو عامل را نشان می دهد ϵ_{ijk} اثر مانده های غیرقابل توصیف بوسیله عامل را بیان می نماید.این انحرافات تصادفی و دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^۲$ می باشند.

مقدار μ_{ij} را می توان براساس ترکیبی از میانگین عمومی، اثرات ویژه هر عامل کنترل شده و اثرات ناشی از ترکیب این عامل ها، نشان داد. اما برای این منظور بایستی انواع سازماندهی طرح آزمایش ها و الگوی ریاضی مربوط به هریک را توضیح دهیم.

سازمان طرح آزمایش ها با دو عامل کنترل شده :

دو نوع سازماندهی طرح آزمایش ها با دو عامل کنترل شده را می توان بررسی نمود.

الف. طرح عاملی : این طرح عبارتست از اعمال همزمان دو عامل مستقل از هم به یک واحد آزمایش. به عنوان مثال فرض کنید بخواهیم مصرف بنزین یک خودرو را در مسیری معین و با استفاده از چهار نوع بنزین مختلف مقایسه کنیم

البته با در نظر گرفتن این قید که چهار تکرار طرح، متناظر با چهار روز اول هفته باشد(در هر روز یک تکرار). در این حالت عوامل کنترل شده به ترتیب نوع بنزین و روز هفته خواهند بود. توجه داشته باشید ک این عامل ها کاملا از یکدیگر مستقل هستند.بنابراین برخسب فرضهایی که می توان در مورد اثرات عامل ها در نظر گرفت، دو حالت می تواند وجود داشته باشد.

		عامل اول : A				
		A_1	...	A_i	...	A_v
عامل دوم B	B_1	$A_1 \cdot B_1$		$A_i \cdot B_1$		$A_v \cdot B_1$
	$\vdots$					
	B_j	$A_1 \cdot B_j$		$A_i \cdot B_j$		$A_v \cdot B_j$
	$\vdots$					
	B_w	$A_1 \cdot B_w$		$A_i \cdot B_w$		$A_v \cdot B_w$

۱. طرح فاکتوریل بدون اثر متقابل و ۲. طرح فاکتوریل با اثر متقابل.

طرح فاکتوریل بدون اثر متقابل : در این حالت فرض می کنیم که اثرات دو عامل افزایشی اند. یعنی اثر تفاضلی یک وجه از یکی از عامل های کنترل شده به وجوه عامل دیگر بستگی ندارد. این اثر برای تمام وجه های عامل دیگر ثابت باقی می ماند. حال اگر میانگین کل اثرات را برای تمام وجه های دو عامل کنترل شده μ، اختلاف اثر از وجه A_i را ، $\alpha_i = \mu_i - \mu$ و همچنین ختلاف اثر ناشی از وجه B_j را نیز $\beta_j = \mu_j - \mu$ بنامیم، داریم :

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

این طرح را وقتی به کار می بریم که اطمینان داریم اثرات تفاضلی یکی از عامل ها به وجه های عامل دیگر بستگی ندارد یا این بستگی آنقدر ناچیز است که می توان از اثرات متقابل صرف نظر کرد. در این حالت جدول تحلیل واریانس برای بررسی مدل به صورت زیر حاصل می شود :

منبع نوسانها	درجات آزادی	مجموع مربعها	میانگین مربعها	نسبتها
عامل A	$v-1$	$SSA = S_i - S$	$SSA/(v-1)$	$F_A = MSA/MSE$
عامل B	$w-1$	$SSB = S_j - S$	$SSB/(w-1)$	$F_B = MSB/MSE$
مانده	$n-v-w+1$	$SSE \begin{cases} S_{ijk} - S_i - S_j + S \\ \textit{ou par différence} \end{cases}$	$SSE/(n-v-w+1)$	
جمع کل	$n-1$	$TSS = S_{ijk} - S$		

در این جدول مقادیر عنوان شده به صورت زیر تعریف می شوند :

$$S_{ijk} = \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^{۲} \quad , \quad S = \sum_i y_{...}^{۲}/rvw$$

$$S_i = \sum_i y_{i..}^{۲}/rw \quad , \quad S_j = \sum_j y_{.j.}^{۲}/rv$$

در این روابط $y_{i..}$ ، $y_{i..}$ و $y_{.j.}$ به ترتیب مجموع کل مشاهدات ، مجموع مشاهدات عامل i ام و مجموع مشاهدات عامل j ام می باشند. میانگین مربعات هریک از عامل ها نیز با MSA و MSB نمایش داده شده است.

نسبت محاسبه شده در آخرین ستون از توزیع فیشر با $(w-۱)$ و $(n-v-w-۱)$ درجه آزادی پیروی می کند. به منظور بررسی فرض برابری میانگین تیمارهای عامل های A و B (بررسی اثر عامل ها)، F_A و F_B با مقادیر حاصل از جدول توزیع فیشر مقایسه می شوند. در صورتی که مقادیر نسبتها بزرگتر از مقدار حاصل از جدول باشند، فرض صفر مبنی بر برابری میانگین ها رد می شود.

طرح فاکتوریل با اثرات متقابل : در این حالت فرض می کنیم که اثرات دو عامل افزایشی ساده نیست یعنی اثر تفاضلی یک وجه از یک عامل کنترل شده بهوجوه عامل دوم بستگی دارد. در این حالت جمله μ_{ij} را می توان به چهار جمله تجزیه کرد.

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$$

در این رابطه $(\alpha\beta)_{ij}$ انحراف بین μ_{ij} و پارامترهای الگوی بدون اثر متقابل را نشان می دهد. انحرافی که ناشی از اعمال همزمان وجه های A_i و B_j است.

در جدول تحلیل واریانس حاصل، علاوه بر اثر هر یک از عامل ها اثر متقابل آن ها نیز بررسی می شود.

منبع تغییرات	درجه آزادی	مجموع مربعها	میانگین مربعها	نسبت
عاملهای ترکیب شده	$vw - 1$	$SST = S_{ij} - S$	$SST/vw - 1$	$F_T = MST/MSE$
عامل A	$v - 1$	$SSA = S_i - S$	$SSA/(v - 1)$	$F_A = MSA/MSE$
عامل B	$w - 1$	$SSB = S_j - S$	$SSB/(w - 1)$	$F_B = MSB/MSE$
اثر متقابل	$(v - 1)(w - 1)$	$SS(AB) = S_{ij} - S - SSA - SSB$	$SS(AB)/(v - 1)(w - 1)$	$F_{AB} = MS(AB)/MSE$
مانده	$(r - 1)vw$	$SSE = \begin{cases} S_{ijk} - S_{ij} \\ \text{ou} \\ \text{par différence} \end{cases}$	$\dfrac{SSE}{(r - 1)vw}$	
کل	$rvw - 1$	$TSS = S_{ijk} - S$		

<u>طرح سلسله مراتبی</u> : برای توضیح این طرح با یک مثال شروع می کنیم. فرض کنید که دو کارخانه قطعات مکانیکی ناتمام را از تولیدکننده مشترکی دریافت کرده و آن ها را تکمیل می کنند. برای داوری کیفیت تولید این دو کارخانه، دو میانگین هم سطح را که از اندازه گیری قطعات تکمیل شده به وسیله دو کارخانه حاصل شده است، مقایسه کرده و تغییر پذیری این میانگین ها را برای هر کارخانه برآورد می کنیم. اکنون در هر کارخانه چهار روز تولید را به تصادف انتخاب می کنیم. برای هر یک از روزهای منتخب دو قطعه برمی داریم و ۱۶ قطعه برداشت شده را با افزار اندازه گیری یکسانی اندازه گیری می کنیم.

در صورتی که الگوی فاکتوریل را بپذیریم، در واقع کوشش خواهیم کرد تفاوت های سطوح را به وسیله اثر دو کارخانه و با اثر روزانه که برای دو کارخانه مشترک است، توضیح دهیم. در این صورت به طور ضمنی فرض کرده ایم که برا ی هر یک از چهار روز نمونه برداری، وجه منتسب به روز، با زیرنویس j در کارخانه اول، با وجه منتسب به روز، با همان زیرنویس برای کارخانه دوم یکسان است. ولی این مطلب منطقی نیست، چراکه این زیرنویس تنها برای مشخص کردن قطعات برداشت شده در تولید هر کارخانه بکار می رود. در واقع شکل درست نمایش الگوی ریاضی این آزمایش به صورت زیر می باشد.

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + (\beta_i)_j + \epsilon_{ijk}$$

که در آن α_i ها معرف تغییرات میانگین های سطح است که به هر کارخانه می توان نسبت داد. $(\beta_i)_j$ ها تغییرات میانگین های سطح در کارخانه i است و ϵ_{ijk} نیز تغییرات مانده ای سطح است که به وسیله کارخانه توضیح پذیر است و نه به وسیله ی تغییرات روزانه در کارخانه.

منبع : طرح ریزی و تحلیل آزمایش ها/ نوشته پیر شاپوی/ ترجمه دکتر علی مشکانی / انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.